Funktionen und ihre Eigenschaften

Monotonie & Steigungsverhalten

Funktionen und ihre Eigenschaften

Monotonie & Steigungsverhalten

Inhalt

- Monotonie
    - monoton steigende und fallende Funktionen
    - strenge Monotonie
- Steigungsverhalten
    - linear
    - quadratisch
    - exponentiell

Funktionen und ihre Eigenschaften

Monotonie

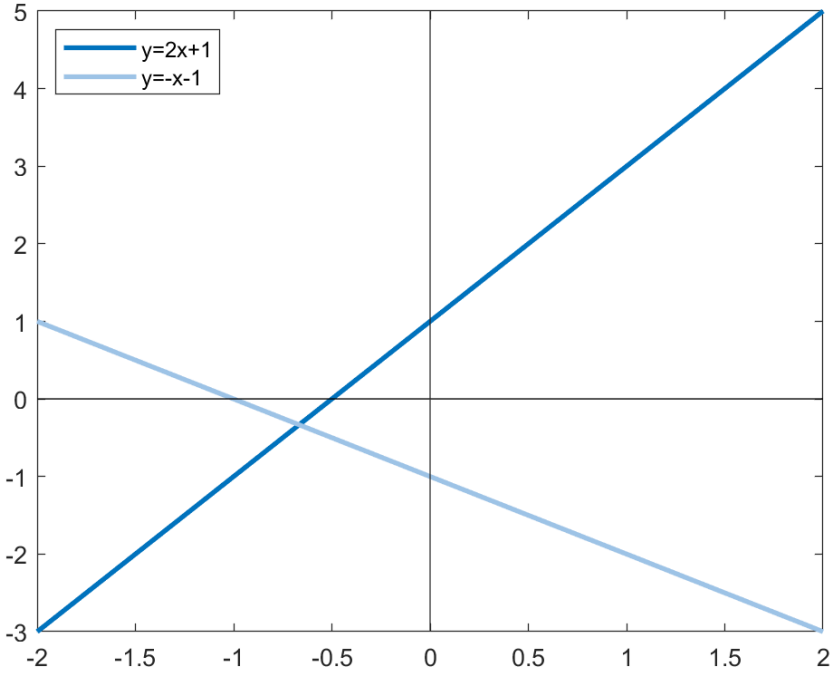
Was verstehen wir unter Monotonie?

Unter Monotonie verstehen wir das Steigungsverhalten von Funktionen.

Eine Funktion kann…

… monoton fallen

… monoton steigen



Funktionen und ihre Eigenschaften

Monotonie

Was verstehen wir unter Monotonie?

Unter Monotonie verstehen wir das Steigungsverhalten von Funktionen.

Eine Funktion kann…

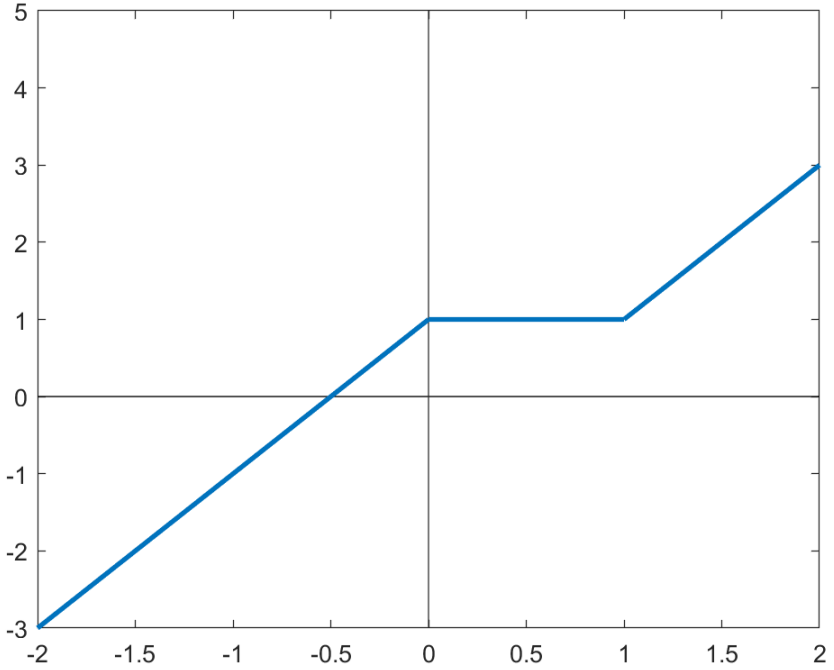
… monoton fallen

… monoton steigen

Wir unterscheiden…

… streng monoton

… monoton



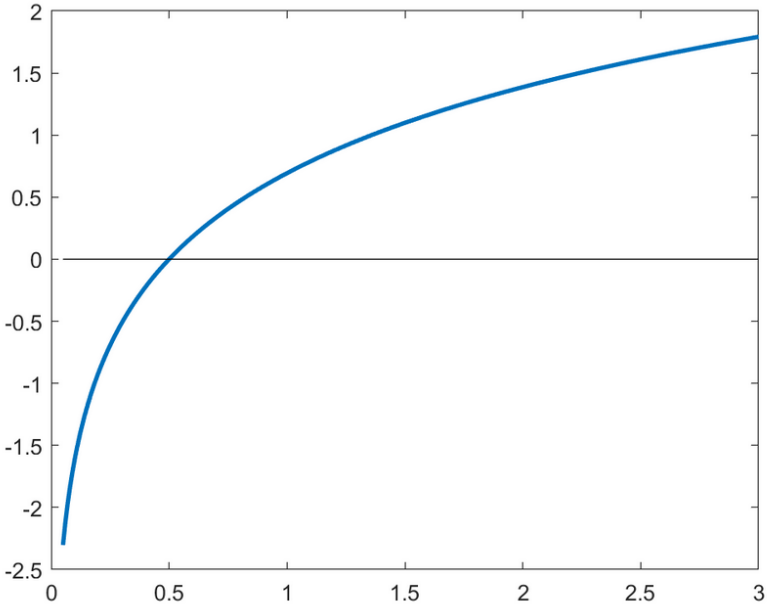
Funktionen und ihre Eigenschaften

Monotonie

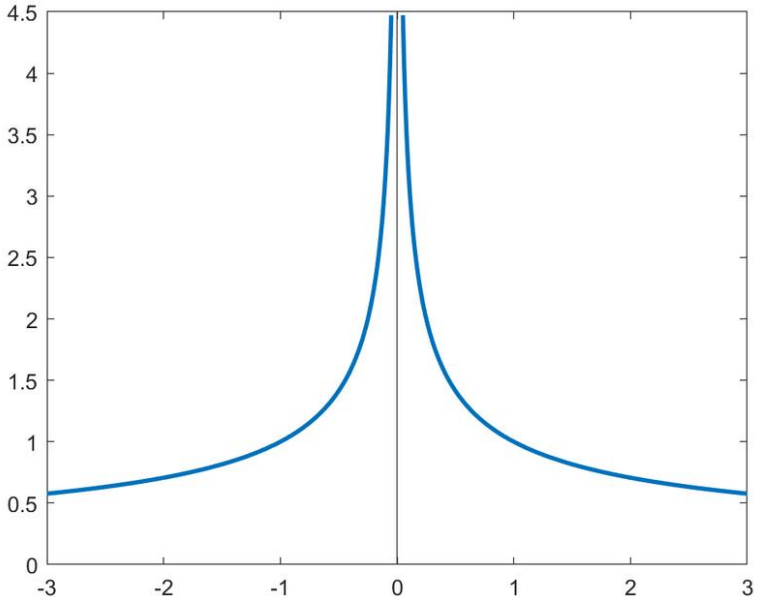
Jetzt sind Sie an der Reihe…

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen…

$$f_1(x) = \ln(2x)$$



$$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$$



Funktionen und ihre Eigenschaften

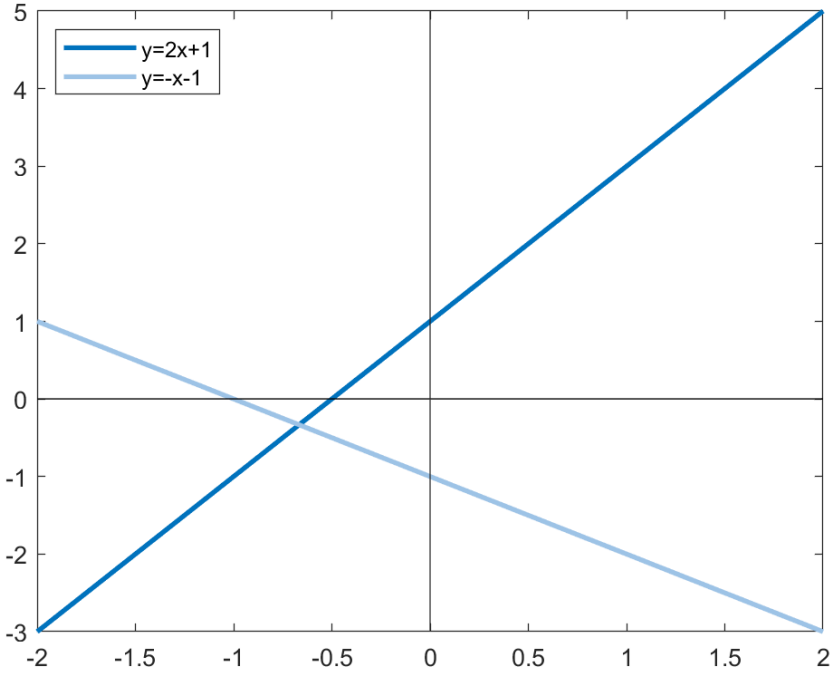
Monotonie

Wie können wir die Monotonie bestimmen?

Die Vorgehensweise hängt von der Darstellung ab…

Funktionsgraph

Wir schauen von links nach rechts, ob die Funktionswerte größer oder kleiner werden.



Limitierung:

Wir sehen nur einen Ausschnitt der Funktion…

Funktionen und ihre Eigenschaften

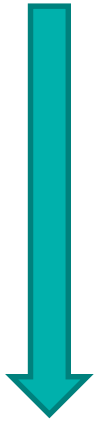
Monotonie

Wie können wir die Monotonie bestimmen?

Die Vorgehensweise hängt von der Darstellung ab…

Wertetabelle

x	$f(x)$	Δf
-1	-1	
-0.5	0	1
0	1	1
0.5	2	1
1	3	1
1.5	4	1



Die Funktionswerte werden immer größer, d.h. die Funktion ist monoton steigend

Die Differenz aufeinander-folgender Funktionswerte ist immer positiv

Funktionen und ihre Eigenschaften

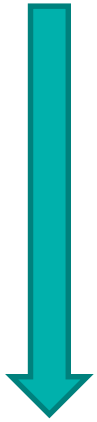
Monotonie

Wie können wir die Monotonie bestimmen?

Die Vorgehensweise hängt von der Darstellung ab…

Wertetabelle

x	$f(x)$	Δf
-1	0	
-0.5	-0.5	-0.5
0	-1	-0.5
0.5	-1.5	-0.5
1	-2	-0.5
1.5	-2.5	-0.5



Die Funktionswerte werden immer kleiner, d.h. die Funktion ist monoton fallend

Die Differenz aufeinander-folgender Funktionswerte ist immer negativ

Funktionen und ihre Eigenschaften

Monotonie

Wie können wir die Monotonie bestimmen?

Die Vorgehensweise hängt von der Darstellung ab…

Wertetabelle

Was müssen wir bei dieser Variante beachten?

Limitierungen:

- Die Tabelle liefert nur einen Ausschnitt der Funktion

- Wenn die Funktion stark oszilliert, können die Aussagen die aus der Tabelle gewonnen werden, falsch sein, wenn wir nicht eine sehr feine Unterteilung für die x-Werte wählen.

Funktionen und ihre Eigenschaften

Monotonie

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Wir betrachten die Wertetabelle (in Excel)…

Wo steigen die Funktionswerte?

Wo fallen sie?

Funktionen und ihre Eigenschaften

Monotonie

Wie können wir die Monotonie bestimmen?

Die Vorgehensweise hängt von der Darstellung ab…

Analytischer Ausdruck

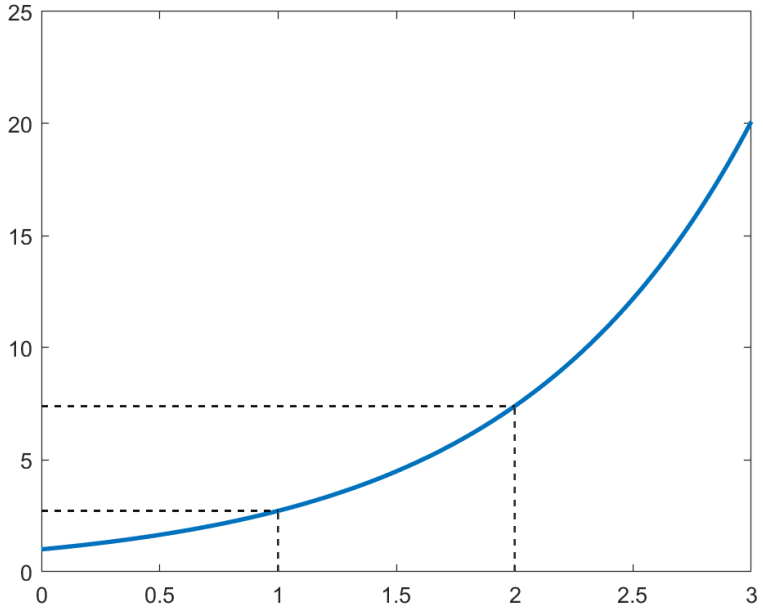
Geraden… $y = 2x + 1$ $y = -x - 1$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Monotonie

Wie können wir die Monotonie bestimmen?

Wir betrachten ein Beispiel…



$x_1 < x_2$ ⇒ $f(x_1) < f(x_2)$

Die Funktion ist steigend!

Die Definition ist konsistent mit unseren bisherigen Überlegungen…

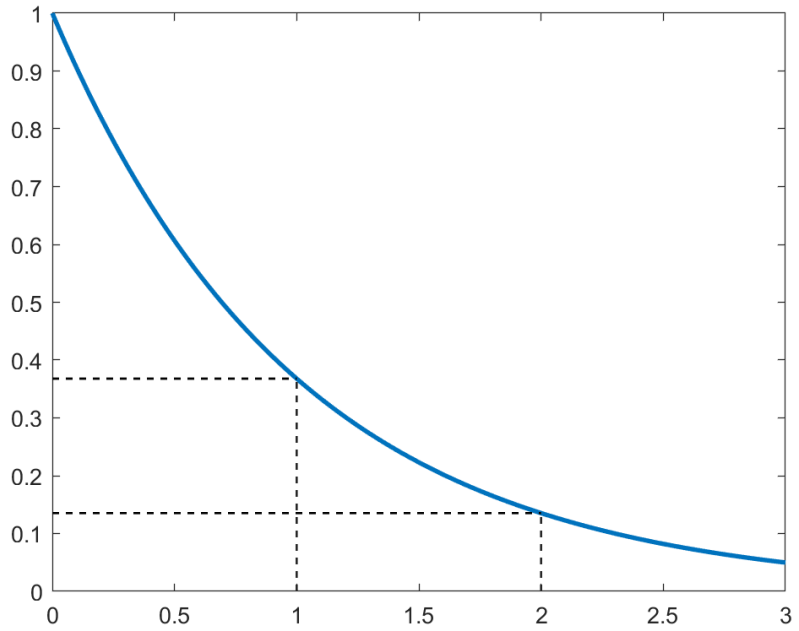
$x_1 < x_2$ ⇒ $f(x_2) - f(x_1) > 0$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Monotonie

Wie können wir die Monotonie bestimmen?

Wir betrachten ein Beispiel…



$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Die Funktion ist fallend!

Die Definition ist konsistent mit unseren bisherigen Überlegungen…

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Monotonie

Wie überprüfe ich die Bedingung?

Die Funktion steigt, wenn… $x_1 < x_2$ ⇒ $f(x_1) < f(x_2)$

Beispiel: $f(x) = e^{2x+1}$

Ich muss jetzt überprüfen, ob für $x_1 < x_2$ gilt: $e^{2x_1+1} < e^{2x_2+1}$

Wir gehen vor wie bei der Bestimmung von Kausalzusammenhängen…

- $x_1 < x_2$ bedeutet, dass wir das Argument vergrößern
- wenn das Argument bei der e-Funktion größer wird, wächst der Funktionswert
- also gilt: $e^{2x_1+1} < e^{2x_2+1}$

⇒ Einfacher ist die Überprüfung per Wertetabelle oder Plot…

Funktionen und ihre Eigenschaften

Monotonie

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der folgenden Funktion:

$$f(x) = x^2 - e^x$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Monotonie

Bisher: globale Monotonie…

Wie prüfe ich lokale Monotonie?

Das ist kein Problem, wir wenden die bisherigen Mittel einfach nur auf den Bereich an, der uns interessiert.

Vorteil:

Die Limitierung, dass wir beim Plot oder der Wertetabelle nur einen Ausschnitt sehen, spielt bei lokalen Betrachtungen eine untergeordnete Rolle…

Funktionen und ihre Eigenschaften

Steigungsverhalten

Was ist das Steigungsverhalten einer Funktion?

Generell kann eine Funktion monoton steigend oder fallend sein…

Häufig interessiert uns aber, wie stark eine Funktion wächst bzw. fällt…



Ein paar Beispiele…

Funktionen und ihre Eigenschaften

Steigungsverhalten

Beispiele zum Steigungsverhalten

Das Hooke'sche Gesetz ist linear…



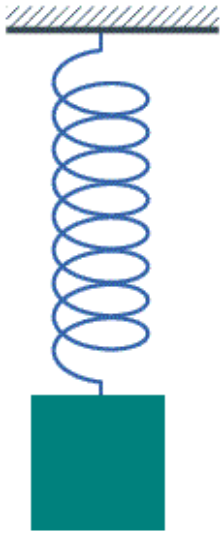
Was bedeutet das?

Funktionen und ihre Eigenschaften

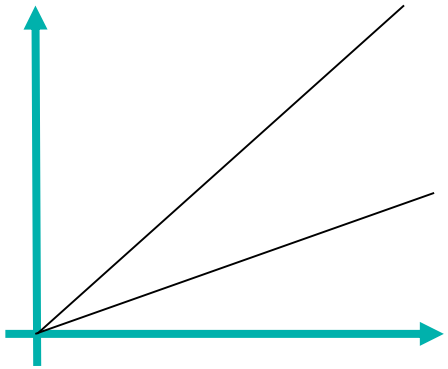
Steigungsverhalten

Beispiele zum Steigungsverhalten

Das Hooke'sche Gesetz ist linear…



- Hooke'sches Gesetz: $F = D \cdot x$
- Die Kraft ist proportional zur Auslenkung
- Die Kraft hängt linear von der Auslenkung ab



Funktionen und ihre Eigenschaften

Steigungsverhalten

Beispiele zum Steigungsverhalten

Wie hängt der Bremsweg von der Geschwindigkeit ab?

$$s = \frac{v^2}{2a}$$

Der Zusammenhang ist quadratisch

Was bedeutet das?

Bei doppelter Geschwindigkeit erhalten wir den vierfachen Bremsweg!

Zum Vergleich:

Wäre der Zusammenhang linear, würde die doppelte Geschwindigkeit nur zum doppelten Bremsweg, nicht zum vierfachen führen!

Funktionen und ihre Eigenschaften

Steigungsverhalten

Beispiele zum Steigungsverhalten

Das Stefan-Boltzmann-Gesetzt liefert den Zusammenhang zwischen der Temperatur eines Körpers und der Strahlungsleistung auf Grund dieser Temperatur…

→ $P = \sigma \cdot A \cdot T^4$

Bedeutung:

Doppelte Temperatur bedeutet sechzehnfache (!) Strahlungsleistung.

→ Gibt es auch andere nicht-polynominale Zusammenhänge?

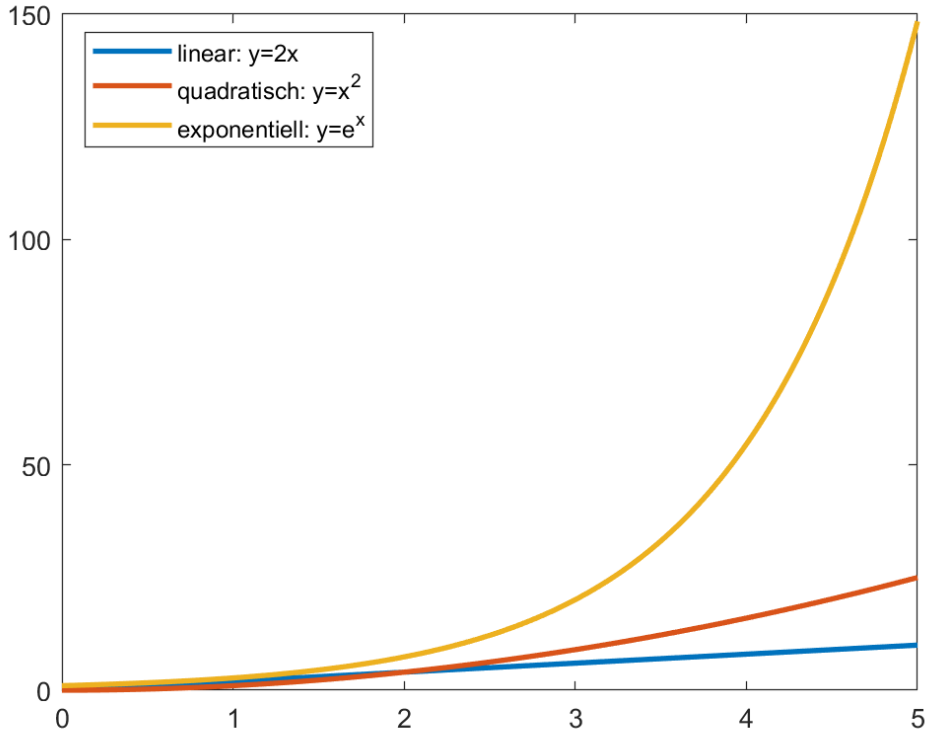
Funktionen und ihre Eigenschaften

Steigungsverhalten

Beispiele zum Steigungsverhalten

Die Ausbreitung von Epidemien verläuft exponentiell…

Bedeutung:



Weitere Beispiele:

- Bakterienwachstum
- radioaktiver Zerfall
- Auf- und Entladen Kondensator

Funktionen und ihre Eigenschaften

Steigungsverhalten

Wie kann ich das Steigungsverhalten feststellen?

Am einfachsten direkt am analytischen Ausdruck…

Linear: $f(x) = c \cdot x$

quadratisch: $f(x) = c \cdot x^2$

exponentiell: $f(x) = c \cdot a^x$

Hinweis:

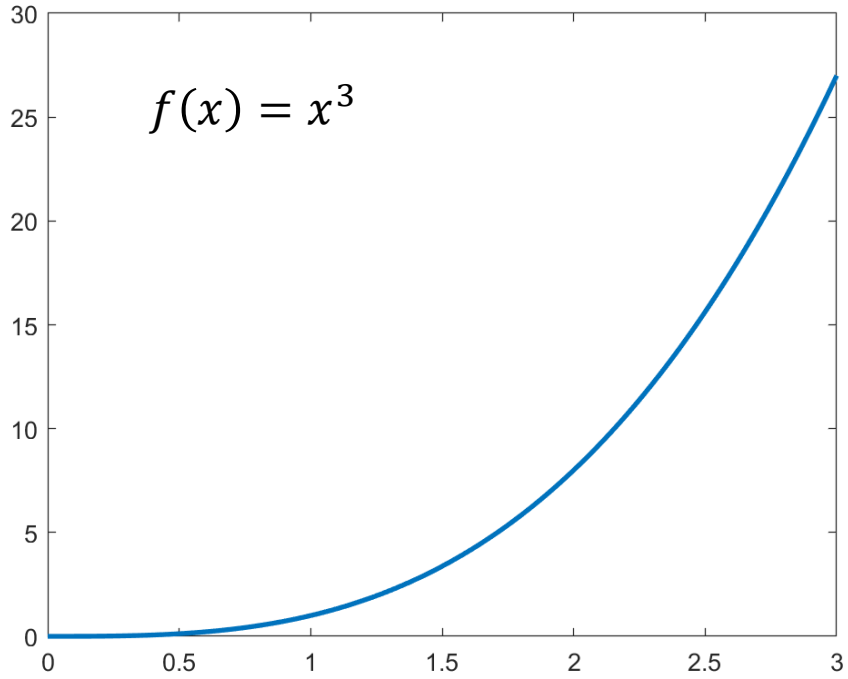
Durch die Beobachtung des genauen Verhaltens kann die Aussage bei der Analyse von Kausalzusammenhängen noch präzisiert werden.

Funktionen und ihre Eigenschaften

Steigungsverhalten

Wie kann ich das Steigungsverhalten feststellen?

Wie erkenne ich das Verhalten am Funktionsgraphen?



Wir müssen einzelne Werte betrachten…

Funktionen und ihre Eigenschaften

Steigungsverhalten

Wie kann ich das Steigungsverhalten feststellen?

Wie erkenne ich das Verhalten am Funktionsgraphen?

Wir halten fest…

- Direkt erkennen kann ich nur lineares Verhalten…
- Bei nichtlinearem Verhalten bekomme ich nur eine grobe Idee…
- Ein Nachweis gelingt nur per Wertetabelle…

Funktionen und ihre Eigenschaften

Steigungsverhalten

Wie kann ich das Steigungsverhalten feststellen?

Wie erkenne ich das Verhalten in der Wertetabelle?



Wir suchen nach üblichen Mustern…

Welche Muster haben wir?

Linear:	doppelter x-Wert bedeutet doppelter y-Wert
Quadratisch:	doppelter x-Wert bedeutet vierfacher y-Wert

Analog dann…

Kubisch:	doppelter x-Wert bedeutet achtfacher y-Wert

Funktionen und ihre Eigenschaften

Steigungsverhalten

Wie kann ich das Steigungsverhalten feststellen?

Wie erkenne ich das Verhalten in der Wertetabelle?

Beispiel:

x	f(x)	g(x)
0	0	0,000
0,2	0,42	0,008
0,4	0,84	0,032
0,6	1,26	0,072
0,8	1,68	0,128
1	2,1	0,200
1,2	2,52	0,288
1,4	2,94	0,392
1,6	3,36	0,512
1,8	3,78	0,648
2	4,2	0,800
2,2	4,62	0,968
2,4	5,04	1,152
2,6	5,46	1,352
2,8	5,88	1,568
3	6,3	1,800

x	f(x)	g(x)
0	0	0,000
0,2	0,42	0,008
0,4	0,84	0,032
0,6	1,26	0,072
0,8	1,68	0,128
1	2,1	0,200
1,2	2,52	0,288
1,4	2,94	0,392
1,6	3,36	0,512
1,8	3,78	0,648
2	4,2	0,800
2,2	4,62	0,968
2,4	5,04	1,152
2,6	5,46	1,352
2,8	5,88	1,568
3	6,3	1,800



linear quadratisch

Funktionen und ihre Eigenschaften

Steigungsverhalten

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Bestimmen Sie das Steigungsverhalten (linear, quadratisch oder exponentiell) der Funktion, die durch folgende Wertetabelle gegeben ist…

x	f(x)
0	0
0,3	0,189
0,5	0,525
0,7	1,029
0,9	1,701
1,1	2,541
1,3	3,549
1,5	4,725
1,7	6,069
1,9	7,581
2,1	9,261
2,3	11,109
2,5	13,125
2,7	15,309
2,9	17,661
3,1	20,181

Funktionen und ihre Eigenschaften

Steigungsverhalten

Wie kann ich das Steigungsverhalten feststellen?

Wie erkenne ich das Verhalten in der Wertetabelle?

Beispiel: Lineares Verhalten

x	f(x)	Delta f
0	0	
0,2	0,42	0,420
0,4	0,84	0,420
0,6	1,26	0,420
0,8	1,68	0,420
1	2,1	0,420
1,2	2,52	0,420
1,4	2,94	0,420
1,6	3,36	0,420
1,8	3,78	0,420
2	4,2	0,420
2,2	4,62	0,420
2,4	5,04	0,420
2,6	5,46	0,420
2,8	5,88	0,420
3	6,3	0,420

Differenz konstant ⇒ linear

$$f(x_1) = m \cdot x_1 + b$$

$$f(x_2) = m \cdot x_2 + b$$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = m \cdot (x_2 - x_1)$$

Achtung:

Sind die x-Werte nicht äquidistant, muss noch durch $(x_2 - x_1)$ geteilt werden!

Funktionen und ihre Eigenschaften

Steigungsverhalten

Wie kann ich das Steigungsverhalten feststellen?

Wie erkenne ich das Verhalten in der Wertetabelle?

Beispiel: Quadratisches Verhalten

x	g(x)	sqrt(g)	Delta sqrt(g)
0	0,000	0,000	
0,2	0,008	0,089	0,089
0,4	0,032	0,179	0,089
0,6	0,072	0,268	0,089
0,8	0,128	0,358	0,089
1	0,200	0,447	0,089
1,2	0,288	0,537	0,089
1,4	0,392	0,626	0,089
1,6	0,512	0,716	0,089
1,8	0,648	0,805	0,089
2	0,800	0,894	0,089
2,2	0,968	0,984	0,089
2,4	1,152	1,073	0,089
2,6	1,352	1,163	0,089
2,8	1,568	1,252	0,089
3	1,800	1,342	0,089

→ Wir ziehen erst die Wurzel

→ Anschließend testen wir die Wurzel auf lineares Verhalten

Achtung:

Funktioniert nur bei rein quadratischem Verhalten…

Funktionen und ihre Eigenschaften

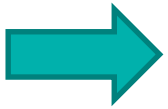
Steigungsverhalten

Wie kann ich das Steigungsverhalten feststellen?

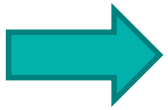
Wie erkenne ich das Verhalten in der Wertetabelle?

Beispiel: Exponentielles Verhalten

x	h(x)	log(h(x))	Delta log
0	2,200	0,342	
0,2	2,576	0,411	0,068
0,4	3,016	0,479	0,068
0,6	3,531	0,548	0,068
0,8	4,134	0,616	0,068
1	4,840	0,685	0,068
1,2	5,667	0,753	0,068
1,4	6,635	0,822	0,068
1,6	7,768	0,890	0,068
1,8	9,095	0,959	0,068
2	10,648	1,027	0,068
2,2	12,467	1,096	0,068
2,4	14,596	1,164	0,068
2,6	17,089	1,233	0,068
2,8	20,008	1,301	0,068
3	23,426	1,370	0,068



Wir wenden den Logarithmus an



Anschließend testen wir auf lineares Verhalten

Funktionen und ihre Eigenschaften

Steigungsverhalten

Jetzt sind Sie an der Reihe...

Wir betrachten die Funktion in der Grafik. Es scheint sich um ein „verschobenes" quadratisches Verhalten zu handeln.

Weisen Sie an Hand der Wertetabelle nach, dass es sich um ein quadratisches Verhalten handelt, indem sie die Verschiebung „herausrechnen".

x	f(x)
1	1,770
2	3,270
3	5,770
4	9,270

